

Esercizi di Analisi Matematica

11 novembre 2022

Esercizi svolti dal prof. Gianluigi Trivia (scritto con Lyx)

1 LIMITI

Diamo prima una rapida introduzione teorica.

1.1 Limite di una funzione

Si dice che la funzione $f(x) \rightarrow A$ per $x \rightarrow a$ (dove A, a sono numeri) oppure che

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (cioè dipendente da ε) tale che

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon \quad \text{per} \quad 0 < \|x - a\| < \delta$$

Analogamente si definisce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

se $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ per $\|x\| > N(\varepsilon)$.

Si usa anche la notazione

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

che significa che $\|f(x)\| > E$ per $0 < \|x - a\| < \delta(E)$, dove E è un numero arbitrario positivo.

Se i limiti $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ esistono, hanno luogo i seguenti teoremi:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}$ dove $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$

Sono di uso frequente i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2.71828\dots$$

Risolviamo ora i seguenti esercizi:

1.2 Limiti del rapporto tra due polinomi per $x \rightarrow \infty$:

si procede dividendo il numeratore e il denominatore per x^n , dove n è il grado superiore di questi due polinomi

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$ in quanto i termini con x al denominatore tendono a 0 al tendere di x all'infinito.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$ per quanto detto per l'esercizio precedente

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(3 + \frac{7}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} = \infty$$

Una modalità analoga può essere utilizzata anche per frazioni contenenti quantità irrazionali, potendo riscrivere anche le radici sotto forma di potenze con esponente razionale.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)}} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x + x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = 2$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$$

1.3 Limiti di funzioni razionali fratte

risolvibili mediante semplificazione della frazione. Cioè, ricordando il teorema di Ruffini, se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se $P(a) = Q(a) = 0$, allora è utile semplificare la frazione per il polinomio $x - a$ che è un divisore comune.

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} = \frac{-1 + 1}{1 + 1} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25} = \frac{10}{0} = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2}{1} = -2$$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3} \right)$ in questo caso ci troviamo in una condizione nella quale, sostituendo direttamente il valore $x = 1$, dovremmo eseguire una differenza tra due infiniti, operazione non certo gestibile secondo le modalità consuete.

In tal caso sommeremo le due frazioni

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 - 1}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2}{1 - x^3} = \frac{2}{0} = \infty$$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 10x + 21}{x - 3}$: scomponiamo il polinomio al numeratore, secondo le modalità del trinomio notevole

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 7)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x - 7 = -4$$

6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 9x^2 + 21x - 4}{x - 4}$: scomponiamo ancora il numeratore verificando se è divisibile per il denominatore, facendo riferimento al teorema di Ruffini: calcoliamo il polinomio al numeratore ponendo $x = 4$; $P(4) = 64 - 144 + 84 - 4 = 0$, cioè il resto della divisione sarà 0 e quindi il polinomio è divisibile per $x = 4$, dando $(x^2 - 5x + 1)(x - 4)$, da cui

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 9x^2 + 21x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 5x + 1) = -3$$

1.4 Limiti con espressioni che contengono quantità irrazionali

Si possono ridurre, in molti casi, a espressioni razionali mediante l'introduzione di una nuova variabile ausiliaria.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ le due radici hanno indice diverso, ma si possono ridurre allo stesso indice 6, applicando le proprietà delle radici, ottenendo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{(1+x)^3}-1}{\sqrt[6]{(1+x)^2}-1}$, ponendo $y^6 = 1+x$, e quindi per $x \rightarrow 0$ si ha $y \rightarrow 1$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1)(y^2 + y + 1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ponendo $x = y^2$ (se $x \rightarrow 1$ allora $y \rightarrow 1$) si ha

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^2-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}$$

questo limite si poteva anche calcolare così

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ ponendo $x = y^6$ si ha

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 8}{y^2 - 4} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2 + 2y + 4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + 2y + 4}{y + 2} = 3$$

v

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[3]{x}-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2} = \frac{1}{9}$

Un altro procedimento per determinare il limite di un'espressione irrazionale consiste nel razionalizzare il numeratore o il denominatore la quantità irrazionale.

1. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ razionalizziamo il numeratore moltiplicando per $(2 + \sqrt{x-3})$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})(2 + \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{4 - x + 3}{(x^2 - 49)(2 + \sqrt{x-3})} \\ \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(x+7)(2 + \sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56} \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$: in questo caso dobbiamo ricordare i prodotti notevoli (differenza di due cubi) per poter scomporre $x-8$:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4 = 12$$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$: i due radicali hanno indici diversi; per ridurli allo stesso indice, 6, bisogna considerare il numeratore come la differenza di due cubi e il denominatore come la differenza di due quadrati, cioè

$$\begin{aligned}\sqrt{x}-1 &= (\sqrt[6]{x}-1) \left(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1 \right) \\ \sqrt[3]{x}-1 &= (\sqrt[6]{x}-1) (\sqrt[6]{x} + 1)\end{aligned}$$

pertanto, sostituendo nell'espressione del limite, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[6]{x}-1) \left(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1 \right)}{(\sqrt[6]{x}-1) (\sqrt[6]{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + 1 \right)}{(\sqrt[6]{x} + 1)} = \frac{3}{2}$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$: razionalizziamo il numeratore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$: anche qui razionalizziamo il denominatore:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6})(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} &= \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} &= \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$: razionalizziamo il numeratore di questa espressione intesa come una frazione apparente con denominatore 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0$$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x(x+a)}-x$: come sopra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2(1+\frac{a}{x})}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{x(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1)} = \frac{a}{2}$$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3})$: razionalizziamo sempre il numeratore della frazione apparente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sqrt[3]{1-x^3}) \left(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2} \right)}{\left(x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2} \right)} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2 - x\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} + \sqrt[3]{x^6 \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)^2}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} + x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)^2}} &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \left(1 - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1 \right)^2} \right)} &= 0 \end{aligned}$$

9. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3-\sqrt{4+x}}{-5+6x+4x^2-x^3}$: in questo caso dobbiamo sia scomporre il denominatore sia razionalizzare il numeratore; la scomposizione del denominatore è eseguibile con la regola di Ruffini osservando che tale polinomio dà resto zero per $x = 5$ ed è quindi divisibile per $(x - 5)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3 - \sqrt{4+x})(3 + \sqrt{4+x})}{-(x-5)(x^2+x-1)(3 + \sqrt{4+x})} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{-(x-5)(x^2+x-1)(3 + \sqrt{4+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x^2+x-1)(3 + \sqrt{4+x})} = \frac{1}{174} \end{aligned}$$

10. $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$: riscriviamo $\sin 3x = \sqrt{1-\cos^2 3x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2 3x}}{\sqrt{1-\cos 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{1-\cos 3x}} = \sqrt{2}$$

11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x}$: applichiamo le formule goniometriche

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)}{\sin x \cos x (\sin x - \cos x)} = 2\sqrt{2}$$

1.5 Limiti notevoli

1.5.1 Caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$: moltiplichiamo numeratore e denominatore per 3,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3$$

1 LIMITI

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$: scomponiamo $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, avremo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{\pi}{n})$: sostituiamo ponendo $x = \frac{\pi}{n}$; per cui se $n \rightarrow \infty$, allora $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\pi \frac{\sin x}{x} \right) = \pi$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$: applichiamo la formula goniometrica di bisezione, $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$: applichiamo le formule di prostaferesi, $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a$$

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$: in questo caso è possibile applicare ancora le formule goniometriche, in particolare la definizione di tangente

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(-\sin x + \cos x)}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (-\cos x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$: basta considerare l'uguaglianza $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$: applichiamo le formule parametriche

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}}{8 \left(\frac{x}{2}\right)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \tan^3 \frac{x}{2}}{8 \left(\frac{x}{2}\right)^3 (1 - \tan^2 \frac{x}{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3} \cdot \frac{1}{2 \cos^3 \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$: divido numeratore e denominatore per $6x$, 6 è il *mcm* $(2; 3)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - \sin 2x}{6x}}{\frac{x + \sin 3x}{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{6x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{x}{6x} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}$$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$: sostituisco innanzitutto $z = 1 - x$, da cui $1 + x = 2 - z$ per far tendere il limite a zero

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(2-z)}{\sin[\pi(1-z)]} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(2-z)}{\sin[\pi z]} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z(2-z)}{\pi \sin \pi z} = \frac{2}{\pi}$$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$: razionalizzo il numeratore

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} = 1 \end{aligned}$$

1.5.2 Caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$: il limite notevole indica che è preferibile introdurre una nuova variabile tendente a zero, $z = 1 - x$, per cui se $x \rightarrow 1$ allora $z \rightarrow 0$, quindi

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \tan \left[\frac{\pi}{2} (1-y) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} z \tan \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} z \right] = \lim_{z \rightarrow 0} z \cot \left[\frac{\pi}{2} z \right]$$

ma la cotangente è il reciproco della tangente

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} z}{\frac{\pi}{2} \cot \left[\frac{\pi}{2} z \right]} = \frac{2}{\pi}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \cot \left[\frac{\pi}{2} - x \right]$: basta ricordare che $\cot \left[\frac{\pi}{2} - x \right] = \tan x$ e applicare il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan(x)}{x} \cdot \frac{2x}{2x \tan 2x} = \frac{1}{2}$$

1.5.3 Caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1-\sin \frac{x}{2}}{\pi-x}$: introduciamo una nuova variabile in modo che tenda a zero al tendere di x a π : $z = \pi - x$, per cui

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{z}{2} \right)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \frac{z}{2})}{2 \frac{z}{2}} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2 \sin^2 x - 5x^2}$: raccogliamo x^2 al numeratore e al denominatore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2 \sin^2 x - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} + 1 \right)}{x^2 \left(2 \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{x} - 5 \right)} = \frac{\frac{3}{2}}{-3} = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$: razionalizziamo il numeratore

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1.5.4 Caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 3x}$: utilizziamo entrambi i due limiti notevoli presentati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

1.6 limiti con esponenziali

del tipo $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = C$. Per risolvere tali limiti bisogna considerare che

1. se esistono e sono finiti i limiti $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = a$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, allora $C = A^B$
2. se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, si può determinare immediatamente il risultato
3. se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, si pone $f(x) = 1 + h(x)$, dove $h(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow a$ e, quindi,

$$C = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + h(x)]^{\frac{1}{h(x)}} \right\}^{h(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} h(x)g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1]g(x)}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x}$: si ha che $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x = 1$, per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^{1+x} = 2^1 = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$: si ha che $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right) = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$ quindi, ricordando l'andamento delle funzioni esponenziali con base tra 0 e 1, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = 0$$

1 LIMITI

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$: si ha che $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$ e che $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, quindi procederemo secondo la terza modalità

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right)\right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}} \right\}^{-\frac{2x}{x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{2x}{x+1}} = e^{-2} \end{aligned}$$

Questo limite poteva anche essere calcolato facendo riferimento al seguente limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{k}{x}\right]^x = e^k$$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = e^{-2}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right) = \frac{2}{3}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$: in questo caso basta scomporre il denominatore e semplificare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$: si ha $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ e $\frac{2x}{x+1} \rightarrow 2$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}} = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$: si ha $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} \rightarrow \frac{3}{2}$ e $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$: si ha $\frac{x^2+2}{2x^2+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ e $x^2 \rightarrow \infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0$$

1.6.1 Caso limite notevole $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$: basta considerare, rispetto al limite notevole, $k = -1$, per avere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$: possiamo risolvere immediatamente

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$: raccogliamo x al denominatore e semplifichiamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x(1 + \frac{1}{x})}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{-1}{x}}{1}\right)^{-x} = e^{-1}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$: applichiamo la proprietà delle potenze

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x \cdot \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{x(1 + \frac{-1}{x})}{x(1 + \frac{3}{x})}\right)^x \cdot \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right] = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} \cdot 1 = \frac{e^{-1}}{e^3} = e^{-4} \end{aligned}$$

1.6.2 caso dei limiti notevoli $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)]$: applicando la proprietà dei logaritmi, riscriviamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln 2$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{(x+1)} - 1}{x+1}$: basta porre $x+1 = t$, da cui

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{(x+1)} - 1}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

1.7 Esercizi sul significato di limite

Esercizio 1. Cosa avviene per le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se il coefficiente $a \rightarrow 0$, i coefficienti b e c sono costanti e, inoltre, $b \neq 0$

applico la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e calcolo il limite delle due soluzioni

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nel caso del segno positivo, razionalizzo il numeratore

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b^2 + b^2 - 4ac}{2a(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2c}{(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)} = -\frac{c}{b}$$

nel caso della radice con segno negativo

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\infty$$

Esercizio 2. Trovare il limite dei perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritti in un cerchio di raggio R e circoscritti intorno ad esso, quando $n \rightarrow \infty$

Soluzione. se il poligono regolare inscritto ha n lati, allora l'angolo al centro sotteso è $\frac{2\pi}{n}$ e un suo angolo alla circonferenza $\frac{\pi}{n}$; applicando il teorema della corda (ogni corda è uguale al prodotto del diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza) si ottiene

$$l_{\text{inscritto}} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

il perimetro sarà pertanto

$$2p = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

al tendere di $n \rightarrow \infty$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = 2\pi R$$

nel caso del lato circoscritto possiamo applicare il teorema dei triangoli rettangoli con un cateto R e angolo opposto $\frac{\pi}{n}$

$$l_{\text{circos}} = 2R \tan \frac{\pi}{n}$$

il perimetro sarà

$$2p_{\text{circos}} = 2nR \tan \frac{\pi}{n}$$

passando al limite, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2nR \tan \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2R \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = 2\pi R$$

Esercizio 3. Il segmento $AB = a$ è diviso in n segmenti uguali e su ciascuno di essi, preso come base, è costruito un triangolo isoscele di angolo di base $\alpha = 45^\circ$. Mostrare che il limite del perimetro della linea spezzata così ottenuta non è uguale alla lunghezza del segmento AB , malgrado che nel limite questa linea spezzata si confonda geometricamente con AB .

Soluzione. Calcoliamo il lato del triangolo isoscele costruito sul tratto del segmento AB , essendo tale triangolo metà di un quadrato di diagonale a/n

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2n}$$

il perimetro di tale triangolo sarà

$$2p = \frac{2a\sqrt{2}}{2n} + \frac{a}{n} = \frac{a}{n} (\sqrt{2} + 1)$$

il perimetro complessivo è pari a n - volte il valore scritto. Se n tende all'infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} (\sqrt{2} + 1) \cdot n = a (\sqrt{2} + 1)$$

Esercizio 4. Determinare le costanti k e b ricavate dall'equazione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(kx + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 0$$

Soluzione. sommiamo le frazioni presenti nella funzione

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3(k-1) + bx^2 + x(k+b) - 1}{x^2 + 1} \right) = 0$$

affinché il limite tenda a zero è necessario che il grado del numeratore risulti inferiore a quello del denominatore, per cui

$$\begin{aligned} k - 1 &= 0 & k &= 1 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

1.8 Infinitesimi e Infiniti

1.8.1 Infinitesimi

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ si dice allora che la funzione $f(x)$ è *infinitesima* per $x \rightarrow a$. Si dice analogamente la funzione $f(x)$ infinitesima quando $x \rightarrow \infty$.

La somma e il prodotto di un numero finito di infinitesimi per $x \rightarrow a$ sono anche infinitesimi per $x \rightarrow a$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x \rightarrow a$ e se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

dove $C \neq 0$, si dice allora che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesime dello stesso ordine*; se invece $C = 0$ si dice allora che la funzione $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $g(x)$.

Se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

si dice allora che le due funzioni sono equivalenti per $x \rightarrow a$. Ad esempio per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x & \tan x &\sim x \\ \ln(1+x) &\sim x \end{aligned}$$

Il limite del rapporto tra due infinitesimi resta immutato se i termini del rapporto vengono sostituiti con infinitesimi equivalenti. In virtù di questo teorema, per trovare il limite della funzione

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

dove $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow a$, si possono togliere (o aggiungere) nel numeratore e nel denominatore della frazione infinitesimi di ordine superiore scelti in modo che le espressioni rimaste siano equivalenti a quelle iniziali.

1.8.2 Infiniti

Se per un numero grande a piacere N esiste un numero $\delta(N)$ tale che per $0 < \|x - a\| < \delta(N)$ la disuguaglianza $\|f(x)\| > N$ sia soddisfatta, si dice allora che la funzione $f(x)$ è infinita per $x \rightarrow a$.

Si definiscono analogamente le funzioni $f(x)$ infinite quando $x \rightarrow \infty$. Analogamente agli infinitesimi, si introduce la nozione di infiniti di ordine diverso.

Esercizio 5. Applicando il teorema relativo al rapporto tra due infinitesimi, si chiede di trovare i limiti:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2} = 3 \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 5 \frac{\sin 5x}{5x} = 15$ essendo i termini x^4 e x^6 infinitesimi di ordine superiore
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)} = \frac{\arcsin x}{-x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = -1$

1.8.3 Continuità delle Funzioni

Si dice che la funzione $f(x)$ è continua per $x = a$ (o nel punto a), se

1. è definita per $x = a$, cioè se esiste l'immagine $f(a)$
2. esiste il limite ed è finito per $x \rightarrow a$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Se una funzione è continua in ogni punto di un campo essa si dice continua in questo campo.

Esercizio 6. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{per } x \neq 2 \\ A & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

Scegliere il valore di $A = f(2)$ della funzione in maniera tale che la funzione $f(x)$ così completata sia continua per $x = 2$.

Soluzione: calcoliamo il limite destro e sinistro della funzione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \end{aligned}$$

pertanto basta porre $A = 4$

Esercizio 7. Il secondo membro dell'uguaglianza

$$f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}$$

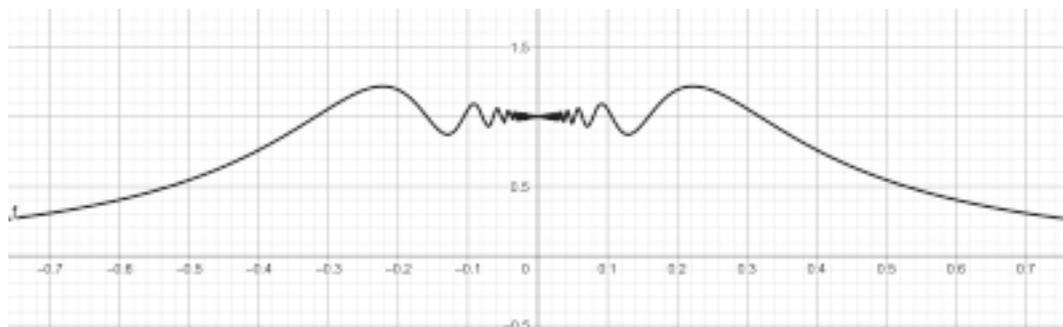
perde significato per $x = 0$. Scegliere il valore di $f(0)$ affinché la funzione $f(x)$ risulti continua per $x = 0$.

Soluzione. calcoliamo il limite della funzione assegnata per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 - 0 = 1$$

ricordando che il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$. Pertanto basterà che $f(0) = 1$.

Si osservi per rendersene conto il grafico della funzione



Esercizio 8. La funzione $f(x)$ non è definita per $x = 0$. Determinare $f(0)$ in modo tale che $f(x)$ sia continua per $x = 0$, se

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$: calcoliamo il limite della funzione per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{e^x} = 2$$

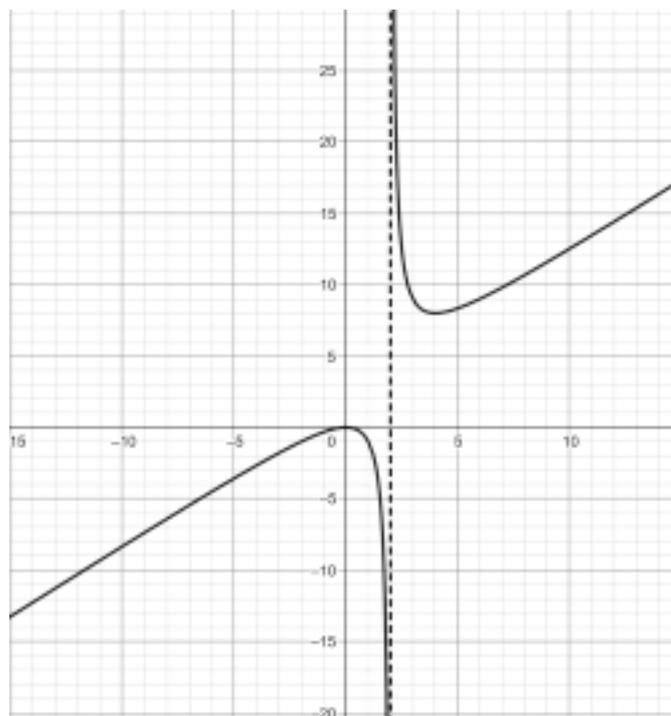
Esercizio 9. Studiare la continuità delle funzioni:

- $y = \frac{x^2}{x-2}$: calcoliamo il limite della funzione per $x \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} &= -\infty \end{aligned}$$

risulta una discontinuità di 2^a specie. La sua forma grafica nell'intorno del punto di discontinuità è mostrata in figura

1 LIMITI



- $y = \frac{1+x^3}{1+x}$: calcoliamo il limite della funzione per $x \rightarrow -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{(1+x)(x^2-x+1)}{1+x} = 3$$

discontinuità apparente ed eliminabile.

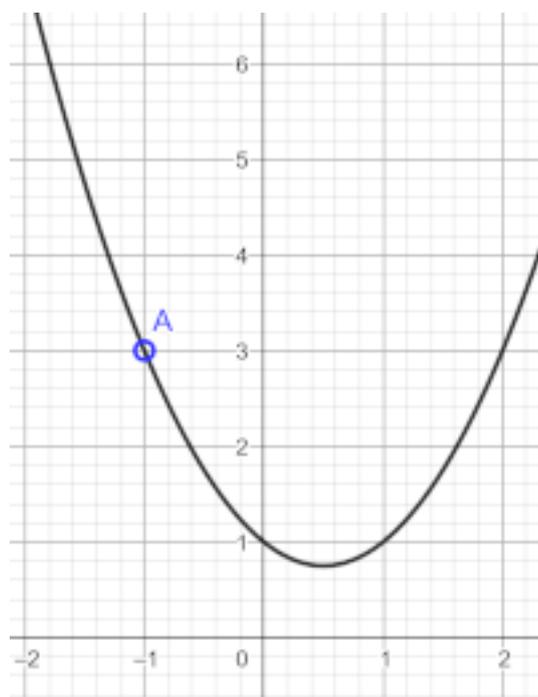
- $y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$: calcoliamo il limite per $x \rightarrow \pm 2$, razionalizzando il numeratore

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24}$$

se ne deduce che per $x \rightarrow -2$ si ha una discontinuità di seconda specie, mentre per $x \rightarrow 2$ si ha una discontinuità eliminabile come risulta dal grafico in figura

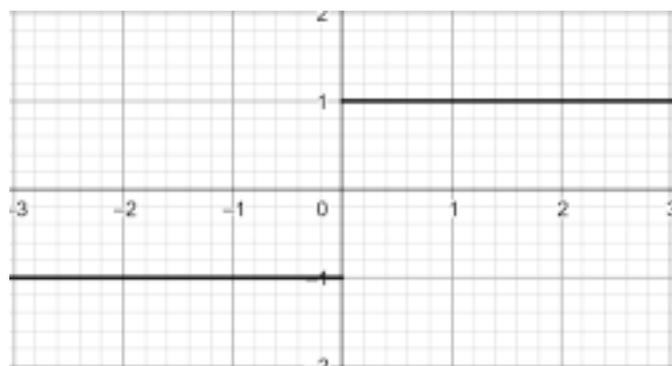
1 LIMITI



$y = \frac{x}{|x|}$: facciamo lo studio dei limiti prima e dopo lo zero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

se il limite destro e sinistro esistono e sono finiti, si ha una discontinuità di prima specie. In questa funzione il salto è pari a 2, come mostrato in figura



- $y = \ln(\cos x)$: calcoliamo il limite per $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) = -\infty$$

con una discontinuità di seconda specie.